

FÍSICA (Informática de Gestión)
Problemas propuestos en Septiembre de 2003
SOLUCIONES
Primera vuelta

PROBLEMA 1.3.1

En la figura P1.3.1 se muestran tres cargas situadas sobre tres vértices de un cuadrado de la do L .

Calcular el campo en el punto P situado en otro vértice. Calcular el potencial en los puntos P y O. Determinar el trabajo que se realiza para trasladar una carga $Q = 2q$ desde el punto P al O.

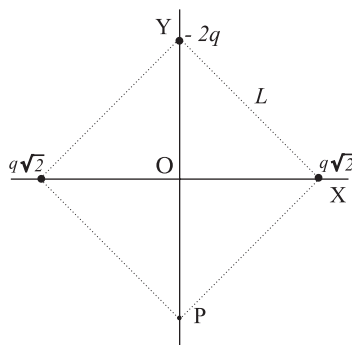


Figura P1.3.1

Solución

1) *Campo eléctrico en P*

En primer lugar calculamos el campo eléctrico en el punto P mediante la relación siguiente:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_1^3 \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Los valores respectivos de los vectores de posición son:

$$\mathbf{r} = -\frac{L}{2}\sqrt{2}\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}_1 = \frac{L}{2}\sqrt{2}\mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{r}_2 = \frac{L}{2}\sqrt{2}\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}_3 = -\frac{L}{2}\sqrt{2}\mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = -\frac{L}{2}\sqrt{2}(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = -L\sqrt{2}\mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = \frac{L}{2}\sqrt{2}(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = L ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = L\sqrt{2}$$

Con estos datos y los valores respectivos de las cargas tendremos que,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(-q\sqrt{2}\frac{1}{L^3}\frac{L}{2}\sqrt{2}(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) + \frac{2q}{2\sqrt{2}L^3}L\sqrt{2}\mathbf{u}_y + q\sqrt{2}\frac{1}{L^3}\frac{L}{2}\sqrt{2}(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y) \right)$$

Realizando operaciones llegamos al siguiente resultado:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(-\frac{2}{L^2}\mathbf{u}_y + \frac{1}{L^2}\mathbf{u}_y \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{L^2}\mathbf{u}_y$$

2) *Potencial eléctrico en P*

Procedemos al cálculo del potencial aplicando la relación,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_1^3 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Con los datos de los vectores de posición obtenidos en el apartado anterior tenemos lo siguiente:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q\sqrt{2}}{L} - \frac{2q}{L\sqrt{2}} + \frac{q\sqrt{2}}{L} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{L} (2\sqrt{2} - \sqrt{2})$$

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{L} \sqrt{2}$$

3) *Trabajo para trasladar la carga $Q = 2q$*

Para determinar el trabajo que se realiza al trasladar la carga Q desde el punto P hasta el O tenemos en cuenta que dicho trabajo es:

$$W = Q (V(P) - V(O))$$

Únicamente tenemos que calcular $V(O)$ para determinar dicho trabajo. Como todas las cargas están a la misma distancia $L\sqrt{2}/2$ del punto O,

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q\sqrt{2}}{L\sqrt{2}/2} - \frac{2q}{L\sqrt{2}/2} + \frac{q\sqrt{2}}{L\sqrt{2}/2} \right)$$

$$V(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{L} (4 - 2\sqrt{2})$$

$$V(P) - V(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{L} (\sqrt{2} - (4 - 2\sqrt{2})) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{L} (3\sqrt{2} - 4)$$

Por tanto el trabajo pedido será,

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{L} (6\sqrt{2} - 8)$$

PROBLEMA 1.3.2

En la figura P1.3.2 se muestra un circuito de corriente continua. Calcular las corrientes que atraviesan las dos pilas. Indicar razonadamente si suministran o reciben energía. Ahora conectamos a los bornes A-B una resistencia de $4\ \Omega$. Calcular en las nuevas condiciones las corrientes anteriores. ¿Suministra ahora energía la pila de 2 voltios?

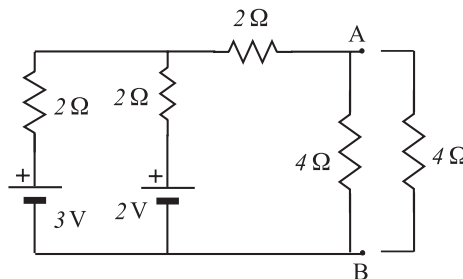


Figura P1.3.2

Solución

1)

Planteamos en primer lugar el sistema de ecuaciones de la red. En este caso es:

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= 4I_1 - 2I_2 \\ 2 &= -2I_1 + 8I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 4I_1 - 2I_2 \\ 2 &= -2I_1 + 8I_2 \end{aligned}$$

Las corrientes respectivas se resuelven mediante el método de Cramer.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{3}{7} ; \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{5}{14}$$

La corriente en la rama común es,

$$I_c = I_1 - I_2 = \frac{3}{7} - \frac{5}{14} = \frac{1}{14}$$

Un vez conocidas las corrientes y su sentido podemos razonar sobre el suministro de energía por la pila.

La pila de 3 voltios, por la que circula la corriente I_1 , suministra energía ya que la corriente I_1 entra por el polo negativo y sale por el positivo, es decir, a todos los electrones se los pasa de un potencial bajo a otro más alto. La pila de 2 voltios recibe energía por que I_c entra por el polo positivo y sale por el negativo, es decir, lo contrario del caso anterior.

2)

Ahora el circuito se modifica por que en el segundo lazo se ponen en paralelo dos resistencias de 4Ω . La composición de estas resistencias da como resultado otra que es:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow R_c = 2\Omega$$

El nuevo circuito se muestra en la figura P1.3.2a

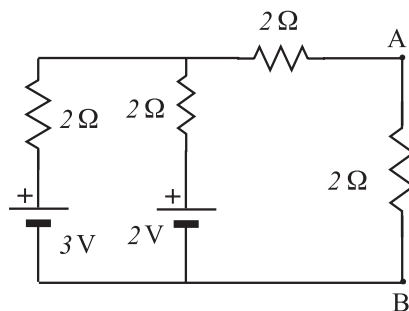


Figura P1.3.2a

Las ecuaciones de malla en el nuevo circuito son:

$$\begin{aligned} 1 &= 4I'_1 - 2I'_2 \\ 2 &= -2I'_1 + 6I'_2 \end{aligned}$$

La soluciones respectivos son:

$$I'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{10}{20} ; \quad I'_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{20} = \frac{10}{20}$$

La corriente en la rama común es,

$$I'_c = \frac{10}{20} - \frac{10}{20} = 0$$

La pila de 2 voltios NO recibe NI suministra energía porque la corriente $I'_c = 0$.

PROBLEMA 1.3.3

Tenemos una espira MNPQR doblada de la forma que indica la figura P1.3.3. La espira está en presencia de un campo magnético uniforme que forma un ángulo de 60° con el eje X. $\mathbf{B} = B(\mathbf{u}_x \cos 60 + \mathbf{u}_y \sin 60) \cos \omega t$. Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

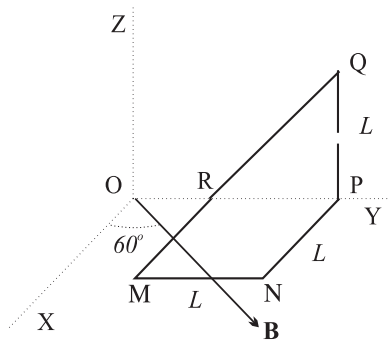


Figura P1.3.3

Solución

La f. e. m. inducida se calcula mediante la ley de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

En primer lugar debemos calcular el flujo Φ a través de la espira compuesta por una parte sobre el plano XY en forma de U cuadrada y otra sobre el plano YZ cuyos lados forman un ángulo.

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_2$$

donde,

$$\mathbf{S}_1 = L^2(-\mathbf{u}_z) \quad ; \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}L^2(-\mathbf{u}_x)$$

Los respectivos flujos son:

$$\Phi_1 = B(\mathbf{u}_x \cos 60 + \mathbf{u}_y \sin 60) \cos \omega t \cdot (-L^2\mathbf{u}_z) = 0$$

$$\Phi_2 = B(\mathbf{u}_x \cos 60 + \mathbf{u}_y \sin 60) \cos \omega t \cdot \left(-\frac{1}{2}L^2\mathbf{u}_x\right) = -B \cos 60 \frac{1}{2}L^2$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{4}L^2 B \cos \omega t$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{1}{4}L^2 B \cos \omega t$$

Aplicando la ley de Faraday tendremos la f. e. m.

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{4}L^2 B \cos \omega t \right) = -\frac{1}{4}L^2 B \omega \sin \omega t$$

FÍSICA (Informática de Gestión)
Problemas propuestos en Septiembre de 2003
SOLUCIONES
Reserva

PROBLEMA 1.4.1

En la figura P1.4.1 se muestra un sistema de condensadores, pila e interruptores. 1) Se cierra el interruptor S_1 manteniendo S_2 abierto. Calcular la carga en los tres condensadores. 2) Se abre el interruptor S_1 y se cierra en S_2 . Calcular de nuevo la carga en cada uno de los tres condensadores. ¿Qué ocurre con la carga total y la carga en condensador C_2 en el segundo caso?

$$C_1 = 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F. } C_2 = C_3 = 2 \mu\text{F. } V_o = 10 \text{ V.}$$

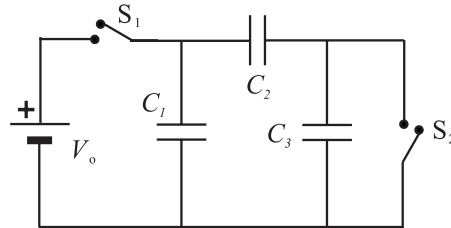


Figura P1.4.1

Solución

1)

En el primer caso los condensadores C_2 y C_3 están dispuestos en serie y al conjunto se le aplica una tensión $V_o = 10 \text{ V}$. Por estar en serie la carga Q de ambos es la misma. La suma de los potenciales es,

$$V_o = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) = Q \frac{4}{4 \times 10^{-6}}$$

$$Q_2 = Q_3 = Q = V_o \times 10^{-6} = 10 \times 10^{-6} = 10^{-5} \text{ C}$$

El condensador C_1 está en paralelo con el conjunto en serie tratado antes. La carga del condensador C_1 se calcula mediante,

$$Q_1 = C_1 V_o = 10^{-6} \times 10 = 10^{-5} \text{ C}$$

2)

Cuando cerramos el interruptor S_2 , manteniendo abierto el interruptor S_1 , se descarga el condensador C_3 al mismo tiempo que se conserva la suma de las cargas que hay en los condensadores C_1 y C_2 . Estos condensadores quedan ahora dispuestos en paralelo, de manera que en sus bornes existe la misma tensión,

$$V = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} \rightarrow Q'_1 = \frac{C_1}{C_2} Q'_2 = \frac{1}{2} Q'_2$$

Por otro lado sabemos que la suma de las cargas se conserva, es decir,

$$Q_1 + Q_2 = 2 \times 10^{-5} = Q'_1 + Q'_2$$

Teniendo en cuenta la relación anterior entre Q'_1 y Q'_2 tendremos que,

$$\frac{1}{2} Q'_2 + Q'_2 = \frac{3}{2} Q'_2 = 2 \times 10^{-5}$$

por tanto,

$$Q'_2 = \frac{4}{3} \times 10^{-5} \text{ C}$$

y la nueva carga en el condensador C_1 será,

$$Q'_1 = \frac{1}{2}Q'_2 = \frac{2}{3} \times 10^{-5} \text{ C}$$

Es decir en el segundo caso la carga se redistribuye entre los dos condensadores C_1 y C_2 , aumentando $(1/3) \times 10^{-5}$ en el condensador C_2 y disminuyendo en la misma proporción en el condensador C_1 .

PROBLEMA 1.4.2

Dado el sistema de conductores cuyos tramos se muestran en la figura P1.4.2. Por los tramos circula una corriente I . Calcular el campo magnético creado en el origen de coordenadas O. $\theta = 45^\circ$.

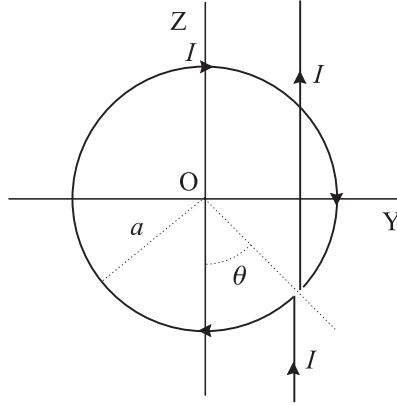


Figura P1.4.2

Solución

El sistema de conductores indicado en la figura P1.4.2 es equivalente a un conductor circular con centro en O, más un conductor rectilíneo e indefinido, paralelo al eje Z, situado a una distancia $d = a \cos 45^\circ = a\sqrt{2}/2$. Por ambos circula una corriente I como indica la figura.

Calculamos los campos magnéticos generados por ambos conductores aplicando los resultados obtenidos en los ejemplos 6.1 y 6.2 del libro de *Física para Informática* de V. López y M. Montoya.

El circuito rectilíneo, con el sentido de la corriente indicado, crea un campo magnético en O,

$$\mathbf{B}_1 = \mu_o \frac{I}{2\pi d} \mathbf{u}_x = \mu_o \frac{I}{2\pi a\sqrt{2}/2} \mathbf{u}_x = \mu_o \frac{I}{\pi a\sqrt{2}} \mathbf{u}_x$$

El tramo en forma de circunferencia de radio a crea un campo magnético en O,

$$\mathbf{B}_2 = \mu_o \frac{I}{2a} (-\mathbf{u}_x)$$

El campo total en O será la suma de ambos, es decir,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \mu_o \frac{I}{a} \left(\frac{1}{\pi\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{u}_x \simeq -\mu_o \frac{I}{a} 0,275 \mathbf{u}_x$$

PROBLEMA 1.4.3

En la figura P1.4.3 se muestra un circuito de corriente alterna. La frecuencia angular del generador es $\omega = 10^5$ y $V = 10$ voltios.

Calcular la corriente, módulo y fase, que circula por la autoinducción L_2 , que está en paralelo con C .

$$L_1 = L_2 = 100 \mu\text{H} = 10^{-4} \text{ H. } C = 2 \mu\text{F y } R = 10 \Omega.$$

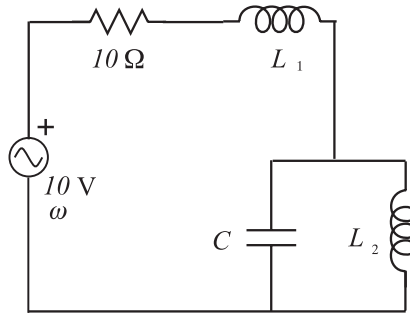


Figura P1.4.3

Solución

Para resolver el circuito debemos calcular en primer lugar la reactancias inductivas X_1 y X_2 y la capacitiva X_c .

$$X_1 = \omega L_1 = 10^5 \times 10^{-4} = 10 \quad ; \quad X_2 = \omega L_2 = 10^5 \times 10^{-4} = 10$$

$$X_c = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^5 \times 2 \times 10^{-6}} = -5$$

Como X_2 y X_c están en paralelo su impedancia equivalente se calcula de la forma siguiente:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{jX_2} + \frac{1}{jX_c} = \frac{1}{j10} + \frac{1}{-j5} = \frac{j5}{50}$$

por tanto,

$$Z_p = -j10 \quad \Omega$$

La impedancia total será la suma de Z_p con los demás elementos que están en serie con dicha impedancia,

$$Z_T = R + jX_1 + Z_p = 10 + j10 - j10 = 10 \quad \Omega$$

La corriente que circula por la resistencia R es,

$$I = \frac{V_o}{10} = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{A}$$

Su módulo es uno y su fase cero.

Para calcular la corriente que circula por la autoinducción L_2 debemos conocer la tensión que se aplica a sus bornes, y esta es,

$$V = V_o - (R + jX_1)I = 10 - 10(1 + j) \times 1 = -j10$$

La corriente será,

$$I_{L2} = \frac{V}{jX_2} = \frac{-j10}{j10} = -1$$

Por tanto,

$$|\mathbf{I}_{L2}| = 1 \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$$

La corriente que circula por el condensador es,

$$\mathbf{I}_c = \frac{V}{jX_c} = \frac{-j10}{-j5} = 2$$

Podemos comprobar que la suma de ambas corrientes es:

$$\mathbf{I}_{L2} + \mathbf{I}_c = 1$$

que es la corriente total que atraviesa el circuito.